Anm. b. d. Korr.: Zur Erläuterung der hier durchgeführten Betrachtung sei noch ergänzt, daß die Kern-γ-Anregung im Prinzip rein quantenmechanisch beschrieben wird. Die Kern-γ-Anregung kommt also dadurch zustande, daß ein γ-Quant absorbiert wird und dadurch der erste Kollektivschwingungszustand des Kerns angeregt wird (z. B. dargestellt durch Oszillatoreigenfunktionen erster Ordnung, die die Abstandswahrscheinlichkeit des Protonen- und Neutronenschwerpunkts voneinander beschreiben). Ein analoges Beispiel hierzu wäre ein bzgl. elektromagnetischer Wechselwirkung n-fach angeregter Oszillator, der z. B. bzgl. irgendeiner Stoßwechselwirkung (oder anderer Wechselwirkung) diesen elektromagnetischen Anregungszustand als ersten Anregungszustand besitzt. Die Lebensdauer und damit die Energiebreite dieses Zustands ist dann durch die Emissionswahrscheinlichkeit eines Lichtquants in diesem Zustand bestimmt, wenn die Stoßwechselwirkung viel kleiner als die elektromagnetische Wechselwirkung ist.

Bei der Kern-γ-Anregung entspricht der Stoßwechselwirkung die γ-Wechselwirkung, der Lichtquantenemissionswahrscheinlichkeit die innere Stoßwahrscheinlichkeit der Neutronen gegen die Protonen und der emittierten Lichtquantenenergie pro Emissionsprozeß die pro Stoß erzeugte Dissipationsenergie.

Zur physikalischen Interpretation der Elektronenselbstbeschleunigung

Von K. Wildermuth

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität München

(Z. Naturforschg. **10a**, 450—459 [1955]; eingegangen am 14. April 1955)

Das punktförmige Elektron wird als Grenzfall eines Elektrons endlicher Ausdehnung betrachtet. Dadurch lassen sich die für die Elektronenbewegung maßgebenden Energieverhältnisse und die dabei auftretenden Kräfte besser durchschauen. Es wird dabei z. B. klar, daß es für das Auftreten der Selbstbeschleunigung nicht nötig ist, daß die elektromagnetische Feldenergie unendlich ist, sondern es ist nur wichtig, daß die mechanische Masse des Elektrons negativ ist.

Bekanntlich führt die Theorie des klassischen punktförmigen Elektrons dazu, daß im Rahmen dieser Theorie das Elektron unter dem Einfluß seines elektromagnetischen Eigenfeldes die Möglichkeit hat, sich selbst zu beschleunigen, wobei sich seine Geschwindigkeit immer mehr der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Die Untersuchung dieses Verhaltens zeigt[1], daß diese Selbstbeschleunigung mit der negativen unendlichen mechanischen Masse des punktförmigen Elektrons zusammenhängt[2]. Da in sämtlichen Arbeiten über dieses Problem von vornherein mit einem punktförmigen Elektron gerechnet wird, tauchen von Anfang an unendliche Ausdrücke auf (z. B. die elektromagnetische Feldenergie und die mechanische Masse des Elektrons), die es schwierig machen, die Energieverhältnisse und die auftretenden Kräfte richtig zu durchschauen.

Zur Klarlegung dieser Verhältnisse ist es daher vielleicht ganz nützlich, das punktförmige Elektron als Grenzfall eines Modellelektrons endlicher Ausdehnung zu betrachten.

Als Modell eines Elektrons wird daher zunächst eine gleichmäßig geladene Kugel vom Radius a und der Gesamtladung e untersucht[3]. Es gilt dann für die Gesamtmasse des Elektrons wieder

$$m = m_{\text{mech}} + m_{\text{el}} .$$

Die Kraft, die auf das Elektron wirkt, ist nun dadurch gegeben, daß man die resultierende elektromagnetische Kraft ausrechnet, die auf die mechanische Masse des Elektrons ausgeübt wird. Hierbei setzt sich die Gesamtkraft im allgemeinen aus einer Kraftkomponente, die von einem äußeren elektromagnetischen Feld herkommt, und einer Kraftkomponente, die vom Eigenfeld des Elektrons herrührt, zusammen. An dieser Stelle kann man bereits den physikalischen Grund für die Selbstbeschleunigung deutlich erkennen. Lassen wir nämlich den Radius des Elektrons immer kleiner

[1] H. Steinwedel, Fortschritte der Physik **1**, 7 [1953]. Auf diese zusammenfassende Darstellung wird in der Arbeit zumeist verwiesen. Dort findet sich ein ausführliches Literaturverzeichnis zu dem hier behandelten Problemkreis.

[2] Die mechanische Masse muß negativ unendlich sein, da die Gesamtmasse des Elektrons $m = m_{\text{mech}} + m_{\text{el}}$ ist, und beim punktförmigen Elektron m_{el} positiv unendlich ist.

[3] Der Grund dafür, daß wir keine oberflächengeladene Kugel nehmen, besteht allein darin, daß die später benötigten Rechnungen für die Volumenladung großenteils bereits von Herglotz[4] durchgeführt wurden, auf die wir daher zurückgreifen können. An den physikalischen Verhältnissen ändert sich dadurch nichts.

werden, so tritt der Fall ein, daß $m_{el} > m$ wird, d.h. m_{mech} wird negativ. Von da ab wird eine elektromagnetische Bremskraft, z.B. die Strahlungsrückwirkung, das Elektron immer mehr beschleunigen, da bei negativer mechanischer Masse Kraftrichtung und Beschleunigungsrichtung einander entgegengesetzt gerichtet sind. D. h. die mechanische Energie $m_{mech}/\sqrt{1-v^2/c^2}$ wird immer stärker negativ, was wiederum wegen der Erhaltung der Gesamtenergie zur Folge hat, daß immer mehr (positive) elektromagnetische Energie in die Umgebung des Elektrons abgestrahlt wird. Man sieht aus dieser Überlegung, daß das selbständige Anwachsen der Elektronengeschwindigkeit bis Lichtgeschwindigkeit bereits eintreten kann, wenn die mechanische Ruhmasse des Elektrons negativ ist; sie braucht dazu nicht negativ *unendlich* zu sein.

1. Quantitative Untersuchung des Modells

Wir wollen nun daran gehen, diese Verhältnisse quantitativ zu untersuchen. Dazu machen wir folgende vereinfachende Annahmen, die an den grundsätzlichen Gesichtspunkten nichts ändern:

1. Die betrachteten Geschwindigkeiten seien immer klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Wir vernachlässigen daher die Produkte der Geschwindigkeit und ihrer zeitlichen Ableitungen (nichtrelativistische Näherung).

2. Die Bewegung des Elektrons sei linear.

Für die Bewegungsgleichung des Elektrons erhält man mit den obigen Voraussetzungen:

$$m_{mech} \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} = K_a + K_e. \tag{1}$$

Hierbei ist K_a die Kraftwirkung des äußeren Feldes und K_e die Kraftwirkung des Eigenfeldes auf die mechanische Masse des Elektrons.

Im nichtrelativistischen Grenzfall wurde die Eigenkraft K_e für die gleichmäßig geladene Kugel bei beliebiger Bewegung des Elektrons von Herglotz[4] ausgerechnet. Für die lineare Bewegung ergibt sich aus diesen Rechnungen:

$$K_e = -\frac{24\, e^2}{a\, c^2} \sum_0^\infty \frac{(-2\,a)^n}{(n+2)\,(n+3)\,(n+5)\,n!\,c^n}\, \frac{d\, x^{n+2}}{d\, t^{n+2}}. \tag{2}$$

a = Radius des Elektrons; e = Elektronenladung; x = Koordinate des Kugelmittelpunkts.

Daß Gl. (2) eine lineare Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung ist, ist nicht verwunderlich, da für die Eigenkraft $K_e\,(t)$ eines geladenen Körpers endlicher Ausdehnung das von diesem Körper innerhalb eines endlichen Zeitintervalls emittierte Feld (retardiertes Feld) maßgebend ist. Betrachten wir in Gl. (2) das erste Glied der rechten Seite, so sehen wir, daß der Faktor

$$(4/3)\,(1/c^2)\,(3\,e^2/5\,a)$$

bei der Beschleunigung (d^2x/dt^2) die träge Ruhmasse des elektrischen Feldes des Elektrons ist, während $(3\,e^2/5\,a)$ die Ruhenergie dieses Feldes darstellt[5].

Untersuchen wir zunächst die Bewegung des Elektrons unter dem Einfluß seiner Eigenkraft, setzen also $K_a = 0$, so ergibt sich für die zugehörige Bewegungsgleichung, wenn Gl. (2) in Gl. (1) eingesetzt wird:

$$m_{mech} \frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{24\, e^2}{a\, c^2} \sum_0^\infty \frac{(-2\,a)^n}{(n+2)\,(n+3)\,(n+5)\,n!\,c^n}\, \frac{d\, x^{n+2}}{d\, t^{n+2}} = 0. \tag{3}$$

Die homogene lineare Diff.-Gl. (3) versuchen wir wie üblich durch den Ansatz $x = \alpha \cdot e^{\lambda t}$ zu lösen. Mit diesem Ansatz ist von vornherein die Lösung $x = x_0 + v\,t$, die die kräftefreie Bewegung des Elektrons beschreibt, außer acht gelassen. Sie interessiert uns im Augenblick nicht. $x = \alpha e^{\lambda t}$ in (3) eingesetzt, ergibt

$$\alpha \cdot \left\{ m_{mech}\, \lambda^2 + \frac{24\, e^2 \lambda^2}{a\, c^2} \cdot \sum_0^\infty \frac{1}{n!} \left(\frac{-2\,a\,\lambda}{c}\right)^n \frac{1}{(n+2)\,(n+3)\,(n+5)} \right\} e^{\lambda t} = 0. \tag{4}$$

Zur Abkürzung führen wir noch die Ausdrücke

$$-\frac{2\,a\,\lambda}{c} = \lambda_0 \tag{5}$$

und

$$\lambda_0^2 \sum_0^\infty \frac{\lambda_0^n}{n!} \left(\frac{1}{(n+2)\,(n+3)\,(n+5)}\right) = \varphi\,(\lambda_0)$$

[4] G. Herglotz, Göttinger Nachrichten **1903**, S. 357.

[5] Der Faktor 4/3 in dem Ausdruck für die Ruhmasse rührt bekanntlich daher, daß man für den Zusammenhalt des Elektrons nichtelektrische Kräfte einführen muß. Da für die Gesamtruhmasse des Elektrons $m = E_{Ges}^{Ruh}/c^2$ gilt, ist die mechanische träge Masse des hier diskutierten Modellelektrons

$$m_{mech} = \left(\frac{E_{mech}^{Ruh}}{c^2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{c^2}\,\frac{3}{5}\,\frac{e^2}{a}\right)$$

(s. dazu l. c.[6], S. 34, 43 und 294).

[6] R. Becker, Theorie der Elektrizität Bd. II, 7. Auflage.

ein. Damit wird aus (4)

$$\alpha\left\{m_{\text{mech}}\frac{c^2}{4a^2}\lambda_0^2+\frac{6e^2}{a^3}\varphi(\lambda_0)\right\}\exp\left\{-\frac{c\lambda_0}{2a}t\right\}=0. \quad (6)$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, läßt sich $\varphi(\lambda_0)$ aufsummieren. Man erhält[7]

$$\varphi(\lambda_0)=\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{4}{\lambda_0^2}+\frac{4}{\lambda_0^3}\right)e^{\lambda_0}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\lambda_0}-\frac{4}{\lambda_0^3}. \quad (5a)$$

Als nächstes müssen wir nun daran gehen, die möglichen λ_0-Werte, durch die (6) befriedigt wird, zu diskutieren. Bevor wir dies an Hand der Gl. (6) tun, wollen wir zunächst überlegen, was für λ_0-Werte wir aus physikalischen Gründen zu erwarten haben. Die Bewegung des Elektrons durch sein Eigenfeld kommt dadurch zustande, daß das vom Elektron in einem bestimmten Zeitpunkt emittierte elektromagnetische Feld teilweise noch das Eigenvolumen des Elektrons zu durchlaufen hat, wobei auf das Elektron über einen endlichen Zeitraum von der Größenordnung a/c Kräfte ausgeübt werden. Man sieht daraus, daß das Elektron durch sein Eigenfeld im Endeffekt eine Geschwindigkeitsänderung (Beschleunigung oder Abbremsung) erfahren kann, deren zeitliche Einstellung größenordnungsmäßig a/c sec dauert. Daraus folgt, daß die $x_r=a_r\,e^{\lambda r t}$ gedämpfte, in Spezialfällen auch ungedämpfte Schwingungen darstellen müssen, deren Dämpfungskonstanten von der Größenordnung c/a oder kleiner sind.

Für die λ_{0r} bedeutet das, daß ihr Realteil positiv sein muß. Zunächst werden wir zeigen, daß dies bei positiver mechanischer Masse wirklich zutrifft. Bei dem Beweis können wir uns wieder eng an die Arbeit von Herglotz[4] anschließen, wo unter der Voraussetzung $m_{\text{mech}}=0$ bewiesen wird, daß der Realteil von λ_{0r} nur positiv sein kann. Dort ist auch bewiesen, worauf wir hier verzichten, daß Gl. (6) unendlich viele Wurzeln besitzt.

Wir skizzieren kurz den oben erwähnten Beweis von Herglotz für $m_{\text{mech}}=0$[8]. Für den Beweis wird folgender funktionentheoretischer Satz benutzt: Ist eine Funktion $f(z)$ innerhalb eines Gebietes $\mathfrak{G}$ der z-Ebene regulär und eindeutig und durchläuft der Punkt $Z=X+iY=f(z)$ in der Z-Ebene eine geschlossene Kurve C, wenn $z=x+iy$ den Rand von $\mathfrak{G}$ durchläuft, so liegen innerhalb $\mathfrak{G}$ so viele Wurzeln von $f(z)=0$, als die Windungszahl der Kurve C um den Punkt $Z=0$ beträgt. Da die Wurzeln λ_{0r} von (6) zueinander konjugiert komplex sind, wählen wir als Gebiet $\mathfrak{G}$ die linke Hälfte der oberen z-Halbebene und denken uns diese durch zwei um den Nullpunkt beschriebene Kreisquadranten von sehr großem und sehr kleinem Radius R und r begrenzt. Man hat dann also zu zeigen, daß der Punkt $Z=X+iY=\varphi(z)$ nicht den Punkt $Z=0$ umläuft, wenn z die vier Begrenzungslinien von $\mathfrak{G}$ durchläuft.

Nimmt man erst $y=0$ und läßt x von $-\infty$ bis 0 gehen, so wandert Z auf der reellen Achse von 1/3 bis 0. Der Abfall von Z erfolgt dabei monoton. Dazu müssen wir zeigen, daß $\varphi'(x)$ keine negative Wurzel besitzt. Hätte $\varphi'(x)$ eine negative Wurzel, so müßte, da $x^4e^{-x}\varphi'(x)$ für $x=0$ samt seinen ersten vier Ableitungen verschwindet, auch der 4. Differentialquotient dieser Funktion eine negative Wurzel besitzen. Aus Gl. (5a) folgt aber, daß

$$\frac{d^4\,(x^4e^{-x}\varphi'(x))}{d\,x^4}=x(4-x)\,e^{-x}<0 \quad \text{für } x<0. \quad (7)$$

$\varphi(x)$ fällt also im Intervall $-\infty<x<0$ monoton von $+1/3$ bis 0. Setzt man $x=0$ und läßt y von 0 nach $+\infty$ gehen, so ist $\mathfrak{Im}\,\varphi(iy)$ stets <0, denn es gilt

$$\varphi(iy)=\frac{1}{3}-\frac{4+y^2}{y^3}\sin(y-n)-2i\,\frac{4+y^2}{y^3}\sin^2\frac{y-n}{2} \quad (8)$$

mit $\operatorname{tg} n=4y/(4-y^2)$.

Läuft daher z auf der positiven y-Achse, so tritt Z niemals in die obere Z-Halbebene. Auf dem Kreisquadranten vom Radius R endlich hat man beliebig nahe $\varphi(z)=1/3+1/z$ und auf jenem vom Radius r ebenso $\varphi(z)=z^2/30$. Die Bilder der beiden Kreisquadranten sind also wieder Kreisbogen, die nicht in die obere Z-Halbebene hineinreichen.

Alles zusammenfassend kann man also den Schluß ziehen, daß der Punkt $Z=0$ außerhalb der Kurve C liegt. Das bedeutet, daß sämtliche Wurzeln der Gl. $\varphi(z)=0$ (außer $z=0$) einen positiven Realteil besitzen müssen, denn wie man sofort aus Gl. (8) ablesen kann, existiert auch keine rein imaginäre Wurzel[9].

[7] Durch Reihenentwicklung von $\varphi(\lambda_0)$ läßt sich leicht rückwärts zeigen, daß $\varphi(\lambda_0)$ für kleines λ_0 quadratisch mit $\lambda_0\to 0$ geht, wie es nach (5) auch sein muß.

[8] Der Beweis für $m_{\text{mech}}>0$ folgt dann daraus beinahe sofort.

[9] Für $y=n+2\pi m$ (m ganze Zahl) wird zwar der Imaginärteil von $\varphi(z)=0$, aber nicht der Realteil.

Zum Beweis für $m_{\text{mech}} < 0$ bemerken wir, daß durch die Funktion $Z = \varphi(z)$ nach dem eben Dargelegten die linke Hälfte der oberen z-Halbebene (Gebiet $\mathfrak{G}$) auf ein Teilgebiet der unteren Z-Halbebene abgebildet wird. Daran ändert sich auch nichts, wenn wir jetzt die komplexe Funktion

$$\overline{Z} = \varphi(z) + \gamma z^2; \quad \gamma = \frac{m_{\text{mech}} \cdot c^2}{30\,(4\,e^2/5\,a)} \tag{9}$$

als Abbildungsfunktion nehmen, solange $\gamma > 0$ ist. Denn liegt z innerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$, so ist auch der Imaginärteil von γz^2 immer negativ. Damit haben wir bewiesen, daß die λ_{0r} auch bei beliebiger positiver Masse m_{mech} keinen negativen Realteil besitzen können, da die Nullstellen von $\overline{Z}$ mit den Nullstellen von (6) zusammenfallen.

Dagegen kann es sich jetzt für bestimmte Massen m_{mech} ereignen, daß auch rein imaginäre λ_0-Werte vorkommen, durch die ungedämpfte Schwingungen beschrieben werden. Man sieht dies mittels Gl. (8) und Gl. (9). Betrachten wir z.B. den Spezialfall $\lambda_0/i = y = n$, so gilt nach Gl. (8) und Gl. (9)

$$m_{\text{mech}} = \frac{1}{3\,y^2 c^2} \cdot 30 \left(\frac{4}{5}\,\frac{e^2}{a}\right).$$

Hierbei bestimmt sich y aus der Beziehung

$$\operatorname{tg} y = 4\,y/(4 - y^2),$$

die, wie man sich leicht überzeugt, sogar unendlich viele reelle y-Werte als Lösungen besitzt. Physikalisch bedeutet das, daß für diese speziellen mechanischen Massen sich Resonanzschwingungszustände einstellen können, bei denen in der hier behandelten Näherung die emittierte elektromagnetische Energie beim Durchlaufen des Elektronenvolumens immer wieder vollständig absorbiert wird. In Wirklichkeit tritt jedoch eine Dämpfung ein, die durch die in unserer Betrachtung weggelassenen quadratischen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsglieder beschrieben wird. Es sei noch erwähnt, daß m_{mech} sehr stark mit a ($\sim a^5$) bei konstant gehaltener Ladungsdichte gegen 0 geht und ebenso mit wachsender Kreisfrequenz $c y/2 a$ bei konstant gehaltenem Radius a. Das ist verständlich, da in beiden Fällen die Masse kleiner werden muß, um dem schwächer werdenden Feld bzw. der größer werdenden Frequenz genügend stark nachkommen zu können, um eine Resonanzabsorption des Eigenfeldes zu verursachen. Wie man an Hand von Gl. (8) leicht zeigen kann, sind die Resonanzfrequenzen y alle von der Größenordnung c/a und größer. Wenn a der Elektronenradius ist, so sind dies etwa 10^{23} und mehr Schwingungen pro sec, was physikalisch auch plausibel ist, da $2a/c$ die Zeit ist, die eine elektromagnetische Welle zum Durchlaufen eines Elektrons braucht.

Auf die numerische Berechnung komplexer λ_0-Werte bei positivem m_{mech} soll hier verzichtet werden, da wir sie für unsere weiteren Erörterungen nicht explizit benötigen. Es sei nur darauf hingewiesen, daß ihr Absolutwert bei positivem m_{mech} von der Größenordnung 1 ($\lambda \sim c/a$) und größer ist. Für die eben erwähnten Schwingungsfrequenzen ($\sim 10^{23}$ Hz) ist ihr Realteil ebenfalls von der Größenordnung 1, d. h. die zu diesen Schwingungen gehörige Dämpfungskonstante wird, wie bereits vorhin plausibel gemacht wurde, von der Größenordnung c/a. Aus dem obigen Hinweis wird nochmals deutlich [s. dazu auch Gln. (5a) und (9)], daß man bei Betrachtung der Schwingungen des Elektrons in seinem Eigenfeld ($m_{\text{mech}} > 0$) die Diff.-Gl. unendlich hoher Ordnung (3) nicht bei einem bestimmten Glied abbrechen darf. Die höheren Glieder werden nämlich im allgemeinen nicht klein gegen 1, da die Koeffizienten der Differentialquotienten mit a^n gehen, die λ-Werte aber im wesentlichen proportional $1/a$ sind.

Bevor wir daran gehen, den Übergang zu negativen mechanischen Massen zu diskutieren, soll noch ein physikalisch interessantes Beispiel untersucht werden, nämlich die Bewegung des Elektrons unter der Wirkung einer konstanten äußeren Kraft. Nach Gln. (1), (2) und (3) lautet die zugehörige Diff.-Gl.

$$m_{\text{mech}} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} \tag{10}$$

$$= K_{\text{a}} - \frac{24\,e^2}{a\,c^2} \sum_0^\infty \frac{(-2\,a)^n}{(n+2)\,(n+3)\,(n+5)\,n!\,c^n}\,\frac{\mathrm{d}\,x^{n+2}}{\mathrm{d}\,t^{n+2}}.$$

Wie man sieht, ist eine spezielle Lösung dieser Gleichung die gleichförmig beschleunigte Bewegung, die sich nach kurzer Zeit ($\sim a/c$ sec) einstellt, da dann die Schwingungen des Elektrons im Eigenfeld abgeklungen sind. Die Beschleunigung b ist dabei

$$b_{\text{a}} = K/(m_{\text{mech}} + m_{\text{el}}). \tag{11}$$

Man würde daraus zunächst folgern, daß bei einer solchen Bewegung keine Abstrahlung stattfindet, da die ganze Kraft K_{a} dazu gebraucht wird, die mechanische und elektromagnetische Masse zu beschleunigen. Außerdem verschwindet auch die sogenannte Strahlungskraft, die bei kleinen Geschwindigkeiten ($v \ll c$) und kleinen Beschleunigungsänderungen[10] gleich $(2\,e^2/3\,c^3)\,(\mathrm{d}^3 x/\mathrm{d} t^3)$ ist.

[10] Die Fourier-Analyse der Beschleunigung darf nur Frequenzen enthalten, die klein gegenüber den Schwingungsfrequenzen des Elektrons im Eigenfeld ($\sim c/a$) sind. Diese Voraussetzung ist in allen praktischen Fällen erfüllt.

Andererseits ist aber die pro sec abgestrahlte Energie unter denselben Voraussetzungen durch

$$(2\,e^2/3\,c^3)\,(\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2)^2$$

gegeben.

Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß nur ein Teil der bei der Beschleunigung erzeugten elektromagnetischen Energie zum Aufbau des elektromagnetischen Nahfeldes verbraucht wird, während der Rest in das Strahlungsfeld übergeht (s. dazu l. c.[1], S. 14 und auch l. c.[6], S. 60). An Hand unseres Modells kann dies sehr instruktiv nachgeprüft werden. Betrachten wir die Bewegung eines Elektrons in einem homogenen elektrischen Feld, das nach einer gleichmäßigen Beschleunigung von T sec aus dem elektrischen Feld austritt, so ist die während der Zeit T in das Strahlungsfeld übergegangene Energie

$$E_{\mathrm{st}} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\cdot T = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,b^2\cdot T \tag{12}$$

und die Geschwindigkeit des Elektrons nach dieser Zeit T

$$v = b\cdot T \quad (\text{für } t = 0 \text{ sei } v = 0). \tag{13}$$

Da nach eben diese Strahlungsenergie dem elektromagnetischen Nahfeld fehlt, das zur Elektronengeschwindigkeit v gehört, muß das Elektron bei seinem Austritt aus dem homogenen elektrischen Feld abgebremst werden. Die Abbremsung erfolgt durch die vorhin diskutierten Eigenfeldschwingungen des Elektrons. Den Geschwindigkeitsverlust $\varDelta v$ können wir mittels Gl. (10) ausrechnen. Man erhält:

$$(m_{\mathrm{mech}} + m_{\mathrm{el}})\left\{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_2 - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_1\right\} = m\,\varDelta v$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} K_{\mathrm{a}}\,\mathrm{d}t - \frac{24\,e^2}{a\,c^2}\left[\sum_1^{\infty}\frac{(-2\,a)^n}{(n+2)(n+3)(n+5)\,n!\,c^n}\cdot\frac{\mathrm{d}x^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\right]_1^2. \tag{14}$$

Wählen wir nun T sehr groß und nehmen an, daß das Elektron zur Zeit t_1 gerade noch im homogenen elektrischen Feld weilt (z.B. einige Elektronenradien vom Feldrand entfernt), während die Zeit t_2 soviel später gewählt sei, daß alle Eigenfeldschwingungen des Elektrons abgeklungen sind, so verschwinden in den Zeitpunkten t_1 und t_2 alle höheren Ableitungen als die zweite. Außerdem können wir $\int K_{\mathrm{a}}\,\mathrm{d}t$ in (14) als klein vernachlässigen. Damit erhält man:

$$m\,\varDelta v = (2\,e^2/3\,c^3)\cdot b. \tag{15}$$

Diesem Geschwindigkeitsverlust entspricht ein Verlust an kinetischer Energie des Elektrons[11]

$$\varDelta E_{\mathrm{kin}} = m\cdot v\cdot \varDelta v = (2\,e^2/3\,c^3)\,b^2\cdot T. \tag{16}$$

Das ist aber gerade gleich der an das Strahlungsfeld abgegebenen Energie[12], wie es wegen des Energiesatzes auch erwartet werden muß. Wir werden auf diese Betrachtung nachher noch einmal zurückkommen.

2. Übergang zu negativer mechanischer Masse

Wir wollen nun dazu übergehen zu sehen, was passiert, wenn $m_{\mathrm{mech}} < 0$ gesetzt wird. Zunächst betrachten wir wieder die Eigenfeldschwingungen; und zwar wollen wir nur den Fall diskutieren, daß $|m_{\mathrm{mech}}| < m_{\mathrm{el}}$ ist, der uns allein nachher beim Übergang zum punktförmigen Elektron interessiert. Wir zeigen zunächst, daß für noch so kleines negatives m_{mech} eine rein negative Wurzel λ_0 existiert, die Anlaß zu einer Selbstbeschleunigung des Elektrons gibt. Dazu betrachten wir wieder den Ausdruck (9). Wir untersuchen also

$$\varphi(\lambda_0) + \gamma\,\lambda_0{}^2 = 0;\ \gamma = \frac{m_{\mathrm{mech}}\cdot c^2}{30\,(4\,e^2/5\,a)} < 0. \tag{9a}$$

Wie man aus (5) ersieht, hat das Glied niedrigster Ordnung in $\varphi(\lambda_0)$ die Form $\lambda_0{}^2/30$. D. h. wegen $|m_{\mathrm{mech}}| < m_{\mathrm{el}}$ wird $\varphi(\lambda_0)$ für kleine λ_0-Werte stärker positiv als $\gamma\,\lambda_0{}^2$ negativ wird. Da aber, wie oben gezeigt, $\varphi(\lambda_0)\to 1/3$ für $\lambda_0\to-\infty$, dagegen $\gamma\,\lambda_0{}^2\to-\infty$ geht, so sieht man, daß λ_0 jetzt eine rein negative Wurzel besitzen muß, d. h. die zugehörige Lösung der Bewegungsgleichung $e^{\lambda t}$ steigt exponentiell an. Weiter erkennt man, daß für $m_{\mathrm{mech}}\to -0$ $\lambda_0\to-\infty$ geht. Das ist verständlich, da bei kleiner negativer mechanischer Masse die resultierende elektrische

[11] Man erkennt daraus, daß für große Beschleunigungszeiten $T\,\varDelta E_{\mathrm{kin}}/E_{\mathrm{kin}} \sim 1/T \to 0$ geht. Daher stimmt Gl. (16) für große Zeiten asymptotisch genau ($T \gg a/c$).

[12] Aus diesen Betrachtungen wird deutlich ersichtlich, daß man $(2\,e^2/3\,c^3)\,(\mathrm{d}^3x/\mathrm{d}t^3)$ im allgemeinen nicht als Strahlungskraft deuten kann. Der Grund ist natürlich darin zu suchen, daß man

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\,\mathrm{d}t$$

nur dann schreiben kann, wenn $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ zur Zeit t_1 und t_2 verschwindet. Die Gleichheit der integralen Ausdrücke gilt natürlich auch für unser Problem, wenn man t_1 und t_2 so wählt, daß in ihnen die Beschleunigung verschwindet.

Feldstärke die mechanische Masse sehr stark in Gegenkraftrichtung beschleunigen kann.

Damit haben wir quantitativ gezeigt, daß, sobald die mechanische Masse des Elektrons negativ wird, eine Selbstbeschleunigung des Elektrons der Art eintreten kann, wie es zu Beginn qualitativ erläutert wurde[13].

Machen wir nun den Übergang $m_{\text{mech}} \to -\infty$, $m_{\text{el}} \to +\infty$ (d. h. $a \to 0$), wobei $m_{\text{mech}} + m_{\text{el}} = m$ bleibt, so wird aus Gl. (9a)

$$\varphi(\lambda_0) + \left(\frac{m \cdot c^2}{\underset{(a \to 0)}{30\,(4\,e^2/5\,a)}} - \frac{1}{30} \right) \lambda_0^2 = 0. \tag{17}$$

Wir interessieren uns zunächst für die rein negative Wurzel λ_0. Da für $a \to 0$ diese Wurzel $\to 0$ geht, können wir die Reihenentwicklung von $\varphi(\lambda_0)$ nach Potenzen von λ_0 beim 2. Glied abbrechen. Aus Gl. (17) wird dann

$$\frac{1}{30}\lambda_0^2 + \frac{\lambda_0^3}{72} + \frac{m \cdot c^2}{\underset{(a \to 0)}{30\,(4\,e^2/5\,a)}} \lambda_0^2 - \frac{1}{30}\lambda_0^2 = 0, \tag{17a}$$

und man erhält (außer dem hier nicht interessierenden Wert $\lambda_0 \equiv 0$)

$$\underset{(a \to 0)}{\lambda_0} = -3\,m c^2 a/e^2. \tag{18}$$

Das zugehörige λ wird damit

$$\lambda = +\tfrac{3}{2}\,(m c^3/e^2) = 1{,}6 \cdot 10^{23}\ \text{sec}^{-1}. \tag{19}$$

Das ist aber genau die Selbstbeschleunigungskonstante des punktförmigen Elektrons[1]. Die übrigen Wurzeln der Gl. (17) bleiben alle endlich. Die zugehörigen λ-Werte gehen für $a \to 0$ alle gegen ∞ (ausgenommen $\lambda \equiv 0$). Damit haben wir den Anschluß an die Theorie des punktförmigen Elektrons gewonnen[1]. Für die Bewegungsgleichung des Elektrons bedeutet dies, daß wir in diesem Grenzfall beim Glied mit der dritten zeitlichen Ableitung, d. h. beim radius-unabhängigen Glied, abbrechen. Das heißt, für das punktförmige Elektron gilt folgende Bewegungsgl.:

$$m_{\text{mech}} \frac{d^2 x}{d\,t^2} = -m_{\text{el}} \frac{d^2 x}{d\,t^2} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^3 x}{d\,t^3}\,;$$
$$m_{\text{mech}} + m_{\text{el}} = m. \tag{20}$$

Man sieht aus diesen Betrachtungen, daß im Feld des punktförmigen Elektrons die Feldstärke am Ort des Elektrons unendlich groß wird (dadurch wird überhaupt erst eine Beschleunigung der unendlich großen negativen mechanischen Masse möglich). Die von ihr ausgeübte Kraft ist dabei der Beschleunigungsrichtung des Elektrons entgegengerichtet. Für normale (physikalische[1]) Bewegungen des Elektrons unter dem Einfluß eines äußeren elektrischen Feldes, bei denen also keine Selbstbeschleunigung auftritt, bedeutet das, daß die Feldstärke am Ort des Elektrons der äußeren Feldstärke entgegengerichtet sein muß, da bei diesen Bewegungen die Beschleunigung des Elektrons in Richtung der äußeren Kraft erfolgt[14].

Der unendlich große Beitrag zur elektrischen Feldstärke am Ort des Elektrons stammt dabei vom elektromagnetischen Trägheitsfeld des Elektrons her, während das sogenannte Strahlungsglied z. B. dafür sorgt, daß bei der Selbstbeschleunigung die Abstrahlung der elektromagnetischen Energie exponentiell anwachsen kann. Kräftemäßig ausgedrückt bedeutet das, dieses Glied sorgt dafür, daß die Eigenkraft, die vom elektromagnetischen Trägheitsfeld herrührt, sich bei der Selbstbeschleunigung immer in gleichsinniger Richtung verändert.

Die Beschleunigung von m_{mech} selbst wird deswegen allein durch die unendlich große Feldstärke des elektromagnetischen Trägheitsfeldes am Ort des Elektrons hervorgerufen. Man kann dies z. B. daran merken, daß bei unstetiger Änderung der äußeren Kraft K_a sich nicht mehr die Beschleunigung unstetig ändert, sondern nur noch ihre erste Ableitung, wie man aus Gl. (20), wenn man sie auf äußere Kräfte erweitert, sofort ablesen kann.

Wir wollen noch einen Blick auf die energetischen Verhältnisse bei der Selbstbeschleunigung werfen. Dazu multiplizieren wir Gl. (20) mit $-\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ und erhalten

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\,m_{\text{mech}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\,m_{\text{el}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}. \tag{21}$$

Hierbei stellt die rechte Seite die pro sec erzeugte elektromagnetische Feldenergie dar. Betrachten wir eine Selbstbeschleunigungsbewegung, bei der das Elektron für $t = 0$ gerade ruht (Beginn der Bewegung), so ist diese Energie immer kleiner als der

[13] Es können bei negativer Masse m_{mech} auch gedämpfte Eigenschwingungen der vorhin geschilderten Art auftreten. Bei diesen Bewegungen verringern sich die Kraftwirkung auf das Elektron zusammen mit der pro sec abgestrahlten Energie im Lauf der Zeit im Gegensatz zur Selbstbeschleunigung, wo es gerade umgekehrt ist. Siehe dazu auch das Folgende.

[14] Notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung, da Selbstbeschleunigung auch in Richtung der äußeren Kraft erfolgen kann.

Energiebetrag, der für den Aufbau eines bewegten Coulomb-Feldes (1. Glied) benötigt wird, da dx/dt und d^3x/dt^3 bei der Selbstbeschleunigung immer einander gleichgerichtet sind[1]. Das ist auch physikalisch sofort verständlich. Damit solch ein selbstbeschleunigtes Elektron in eine gleichförmige Bewegung übergeht, bzw. wieder zur Ruhe kommt, müßte es bereits abgestrahlte Energie wieder absorbieren, was nicht möglich ist.

3. Betrachtung einiger Bewegungsformen des punktförmigen Elektrons

Zunächst untersuchen wir wieder die gleichförmige Beschleunigung. Die zugehörige Bewegungsgleichung lautet

$$m \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3x}{dt^3} = K_a. \tag{22}$$

Wie man sieht, gilt wie beim endlich ausgedehnten Elektron $d^2x/dt^2 = K_a/m$ (K_a = const). Hierbei wird ein Teil der von der äußeren Kraft geleisteten Arbeit zur Erzeugung des Nahfeldes gebraucht, während ein zweiter Teil in Strahlungsenergie umgewandelt wird. Beim plötzlichen Abschalten des Feldes müßte nun das Elektron bei einem physikalisch vernünftigen Verhalten analog zu früher abgebremst werden, damit der Energiesatz nicht verletzt wird. Da dazu Energieabsorption in der eben erwähnten Weise nötig ist, kann dies nicht passieren. Um den Energiesatz zu wahren, kann sich das Elektron nur selbst beschleunigen. Von den Kräften her betrachtet ist die Sache noch einfacher. Wir haben vorhin gesehen, daß sich bei unstetiger Änderung der äußeren Kraft die Beschleunigung trotzdem stetig ändert. D. h. die Beschleunigung hört nach Abschalten des Feldes noch nicht auf. Das ist aber beim Fehlen äußerer Kräfte nur möglich, wenn Selbstbeschleunigung eintritt. Man kann dies natürlich an Hand von Gl. (22) sofort aus der Bedingung ableiten, daß sich beim Abschalten des Feldes Geschwindigkeit und Beschleunigung des Elektrons stetig aneinander anschließen müssen. Wenn T die Beschleunigungszeit ist, so hat die Geschwindigkeit nach Abschalten des Feldes folgende Form:

$$\frac{dx}{dt} = v = b \cdot T + \frac{b}{\lambda} e^{\lambda t}; \qquad \lambda = \frac{3}{2} \frac{m c^3}{e^2}. \tag{23}$$

Um dieses physikalisch unsinnige Verhalten zu verhindern, muß man daher nach Dirac[15] die Lösung des Feldes so abzuändern suchen, daß beim Abschalten des Feldes die Beschleunigung gleich 0 ist. Dirac schlägt dazu vor, daß man die Lösung $x(t)$ für $t < T$ durch Hinzufügen eines Selbstbeschleunigungsgliedes der Form $a\, e^{\lambda(t-T)}$ (für $t \to -\infty$ geht das Glied $\to 0$) so abändert, daß für $t = T$ die Beschleunigung b gerade gleich 0 ist. Da die Selbstbeschleunigungslösung eine Lösung der homogenen Gl. (20) ist, ist auch das abgeänderte $x(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gl. (22)[16]. Ganz ähnlich liegt der Fall bei beliebiger äußerer Kraft $K_a(t)$, auch hier muß durch Hinzufügen einer Selbstbeschleunigungslösung erreicht werden, daß beim Abschalten des äußeren Feldes die Beschleunigung b gerade $= 0$ ist.

Es ist nun sehr einfach, eine Methode anzugeben, wie man bei beliebiger zeitlich vorgegebener äußerer Kraft $K_a(t)$, solange $K_a(t)$ quadratisch integrierbar ist, die physikalische Lösung für die Beschleunigung finden kann. Dazu formt man die Gl. (22) durch Fourier-Transformation um, setzt also

$$K_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(w)\, e^{iwt}\, dw \quad \text{und} \quad b = \frac{d^2x}{dt^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} b(w)\, e^{iwt}\, dw.$$

Dadurch werden bekanntlich gerade die nicht mit der Zeit divergierenden Lösungen ausgewählt; d. h. automatisch werden die Lösungen, die für große Zeiten in eine Selbstbeschleunigungslösung übergehen, ausgeschlossen.

Angewandt auf unser Beispiel ergibt diese Umformung

$$b(w)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\, i\, w\right) = \frac{k(w)}{m} = -\frac{1}{m} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{K}{w + i\varepsilon}\, e^{-iwT}. \quad (\varepsilon \to 0) \tag{24}$$

$k(w) = -1/2\pi i \cdot 1/(w + i\varepsilon) \cdot e^{-iwT}$ $(\varepsilon \to 0)$ kommt dadurch zustande, daß $K_a(t) = K$ für $t < T$ und $K_a(t) = 0$ für $t > T$ sein soll.

Für $b(w)$ ergibt sich also

$$b(w) = -\frac{1}{m} \frac{1}{2\pi} \frac{K \cdot \lambda\, e^{-iwT}}{(w + i\varepsilon)(i\lambda + w)}. \tag{24a}$$

Für $b(t)$ ergibt sich damit:

[15] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., Lond. A **167**, 148 [1938].

[16] Auf die damit verknüpfte Philosophie (akausales Verhalten der Lösung) gehen wir hier nicht ein. Siehe dazu[15]. Weitere Literaturangaben dazu finden sich in l. c.[1]. Siehe dazu auch R. Haag Z. Naturforschg., im Erscheinen.

$$b(t) = \begin{cases} (K/m)\,(1 - e^{\lambda(t-T)}) & \text{für } t < T, \\ = 0 & \text{für } t > T. \end{cases} \tag{24b}$$

Man sieht, für $t = T$ schließen sich die beiden Funktionen stetig aneinander. Wir hätten diese Lösung natürlich auch direkt ohne Fourier-Transformation aus der Forderung herleiten können, daß b und v für $t = T$ sich stetig aneinander schließen sollen und außerdem $b = 0$ für $t = T$ sein soll, was natürlich in diesem Fall einfacher gewesen wäre. Als Geschwindigkeitsverlust gegenüber einer bis $t = T$ gleichförmig beschleunigten Bewegung erhält man:

$$\Delta v = \int_{-\alpha}^{T} \frac{K}{m} e^{\lambda(t-T)}\, \mathrm{d}t = \frac{K}{m\lambda} = \frac{2}{3}\frac{K}{m^2}\frac{e^2}{c^3}. \tag{25}$$

Das ist aber genau das Δv des endlich ausgedehnten Elektrons mit $m_{\text{mech}} > 0$, wenn wir in Gl. (25) $K/m = b$ setzen[17] [s. Gl. (15)]. An diesem Beispiel sieht man, und wie sich leicht allgemeiner zeigen läßt, daß die Diracsche Theorie des klassischen punktförmigen Elektrons genau dasselbe liefert wie die Theorie des endlich ausgedehnten Elektrons, solange es sich um Bewegungen des Elektrons handelt, bei denen die Beschleunigungsänderung des Elektrons klein gegenüber der Selbstbeschleunigungsänderung ist[18] (s. dazu auch Anm. [10]). Da zudem die Diracsche Theorie wegen der Punktförmigkeit des Elektrons verhältnismäßig einfach relativistisch invariant formuliert werden kann, ist sie zumindest in vielen Fällen als zweckmäßige (klassische) phänomenologische Theorie des Elektrons anwendbar.

Sobald die relative Änderung der äußeren Kraft stärker ist als die relative Selbstbeschleunigungsänderung, wandelt sich das Bild vollständig gegenüber den üblichen physikalischen Vorstellungen. Da dieser Spezialfall zum besseren Verständnis des Verhaltens eines Punktelektrons in singulären Feldern (z. B. Coulomb-Feld) dient, soll hier kurz darauf eingegangen werden.

Betrachten wir z. B. eine zeitlich nicht divergierende Lösung für den Fall, daß $K_{\mathrm{a}}(t) = A\,e^{\alpha t}$, $\alpha < \lambda$ für $0 < t < T$, und sonst $= 0$ ist, dann ergibt sich mittels Gl. (22):

$$\begin{aligned} b &= \frac{A}{\alpha^2(1-\alpha/\lambda)}(1 - e^{T(\alpha-\lambda)}) \cdot e^{\lambda t} && \text{für } t < 0, \\ b &= \frac{A}{\alpha^2(1-\alpha/\lambda)}(e^{\alpha t} - e^{(\alpha-\lambda)T}\, e^{\lambda t}) && \text{für } 0 < t < T, \\ b &= 0 && \text{für } t > T. \end{aligned} \tag{26}$$

Wegen $\alpha > \lambda$ sieht man daraus, daß die gesamte Beschleunigungserhöhung des Elektrons überhaupt vor Einsetzen der Kraft stattfindet, während der Zeitdauer der Kraftwirkung geht die Beschleunigung b auf 0 zurück. D. h., die wirksame Kraft auf die negative mechanische Masse des Elektrons verringert sich während dieser Zeitdauer immer mehr. Ohne die Selbstbeschleunigungsglieder würde das Elektron überhaupt in Gegenkraftrichtung beschleunigt werden. Man sieht daraus, die äußere Kraft versucht in diesem Fall die Eigenkraft auf das Elektron in ihre Richtung zu zwingen. Noch deutlicher wird das, wenn $K_{\mathrm{a}}(t)$ z. B. für $t = 0$ singulär wird. Hat z. B. $K_{\mathrm{a}}(t)$ die Form

$$K_{\mathrm{a}}(t) = a/t + a/\lambda t^2, \tag{27}$$

so hat die zugehörige Beschleunigung die Form a/t. Man sieht, daß die Beschleunigung ihr Vorzeichen behält, obwohl die Kraftrichtung für $t \to -0$ ihr Vorzeichen wechselt. Hier tritt also der Fall ein, daß das Elektron eine Zeitlang in Gegenkraftrichtung beschleunigt wird; und zwar gerade dann, wenn die Kraft besonders stark anwächst[19]. Wegen der Singularität des Kraftansatzes kann dies auch durch Hinzufügen einer Selbstbeschleunigungslösung nicht vermieden werden.

Wir wollen nun noch kurz auf das Verhalten eines Punktelektrons in stationären singulären Kraftfeldern eingehen. Als Beispiel betrachten wir die zentrale Bewegung eines Elektrons auf ein anziehendes singuläres Kraftzentrum hin. Die Kraft als Funktion des Abstands habe dabei die Form

$$K(x) = -A/x^l \quad \text{für } x > 0 \quad (l > 1)^{20}.$$

Die zugehörige Bewegungsgleichung des Elektrons lautet dann:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{1}{\lambda}\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} = -\frac{A}{m}\frac{1}{x^l}; \quad \lambda = \frac{3}{2}\frac{m c^3}{e^2}, \quad x > 0. \tag{28}$$

Um die Bewegung des Elektrons für $x > 0$ in der Nähe des Kraftzentrums kennenzulernen, machen wir für x den Ansatz

[17] Wegen der Gültigkeit des Energiesatzes war dies auch zu erwarten.

[18] Das sind Bewegungen, bei denen die „innere Struktur des Elektrons" noch keine Rolle spielt.

[19] Eigenkraft am Ort des Elektrons und äußere Kraft sind während dieser Zeit einander gleichgerichtet.

[20] $l = 2$ ist der Fall des Coulomb-Feldes, der bei Eliezer[21] diskutiert wird.

$$x(t) = (t_0 - t)^\gamma \{a_0 + a_1 (t_0 - t) \ldots\}, t < t_0. \tag{29}$$

Geht man mit diesem Ansatz in (28) ein, so erhält man

$$\gamma = \frac{3}{l+1} \quad \text{und} \quad a_0 = \left\{-\frac{A}{m} \frac{\lambda (l+1)^3}{3(2-l)(1-2l)}\right\}^{1/(l+1)}. \tag{30}$$

Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung in der Nähe des Nullpunkts

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \approx -\frac{3}{l+1}\left\{-\frac{A}{m} \frac{\lambda (l+1)^3}{3(2-l)(1-2l)}\right\}^{1/(l+1)} (t_0 - t)^{(2-l)/(l+1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{3(2-l)}{(l+1)^2} \cdot \left\{-\frac{A}{m} \frac{\lambda (l+1)^3}{3(2-l)(1-2l)}\right\}^{1/(l+1)} (t_0 - t)^{(1-2l)/(l+1)}. \tag{31}$$

Zunächst betrachten wir den Fall $1 < l < 2$. Wie man sieht, geht für $t \to t_0$ die Geschwindigkeit des Elektrons, die auf das Kraftzentrum hin gerichtet ist, gegen 0. Die Beschleunigung ist der Kraftrichtung entgegengerichtet und geht für $t \to t_0$ gegen ∞; d. h. das Elektron wird immer stärker abgebremst, je näher es dem Kraftzentrum kommt.

Für den Fall $l > 2$ ist die obige Entwicklung nicht brauchbar, da a_0 nicht mehr reell ist. Das kommt daher, daß jetzt auch die Geschwindigkeit vom Kraftzentrum weggerichtet ist, wie gleich zu sehen ist. Wir ersetzen daher in (29) $(t_0 - t)^\gamma$ durch $(t - t_0)^\gamma$ $(t > t_0)$. Wie man leicht sehen kann, ändert sich damit an (31) für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung außer der Vertauschung von t und t_0 noch das Vorzeichen von A/m und bei $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ zudem noch das Vorzeichen vor $3/(l+1)$.

Für $l > 2$ bedeutet das, daß in der Nähe des Zentrums jetzt sowohl Geschwindigkeit als auch Beschleunigung vom Zentrum weggerichtet sind. D. h. das Elektron kann jetzt gar nicht mehr bis ans Zentrum gelangen.

Das Coulomb-Feld bildet gerade das Übergangsglied zwischen den beiden eben geschilderten Fällen. Wir können es daher mit der eben angewandten Methode nicht untersuchen. Aber aus diesen Betrachtungen ist bereits zu sehen, daß auch im Fall des Coulomb-Feldes das Elektron nicht an den Ursprung gelangen kann[21]. Auch bei relativistischer Behandlung des Problems wird daran nichts wesentliches geändert.

Damit wollen wir diese Betrachtungen abschließen, die uns nur zeigen sollten, daß in singulären Kraftfeldern in der Nähe der Singularität[22] das Verhalten des punktförmigen Elektrons ganz den üblichen physikalischen Vorstellungen zuwiderlaufen kann.

Aus all diesen Überlegungen sieht man, daß die Theorie des punktförmigen Elektrons dann zu versagen scheint, wenn es sich um Ereignisse handelt, die sich in Raumbereichen abspielen, deren Lineardimensionen von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius $e^2/m c^2 = 3 \cdot 10^{-13}$ cm sind, da dann Erscheinungen wesentlich werden, die mit der Selbstbeschleunigungskonstanten λ zusammenhängen.

Ein physikalisch interessantes Beispiel sei noch kurz erwähnt. Betrachten wir die Bewegung eines Elektrons in einem stationären Kraftfeld, dessen Gradient stetig anwächst $(\mathrm{d}K/\mathrm{d}x > 0)$, so sieht man aus der Bewegungsgleichung

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \frac{m}{\lambda} \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} = K(x); \; K(x) > 0; \; \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \geqslant \frac{1}{\lambda} \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}, \tag{32}$$

daß die Beschleunigung $\mathrm{d}^2 x/\mathrm{d}t^2$ des Elektrons durch das (sogenannte) Strahlungsglied sogar etwas vergrößert wird, da $\mathrm{d}^2 x/\mathrm{d}t^2$ und $\mathrm{d}^3 x/\mathrm{d}t^3$ einander gleichgerichtet sind. Der Grund ist wieder darin zu suchen, daß ein Teil der Elektronenmasse im Eigenfeld steckt, das das Elektron während dieser Bewegung nicht vollständig aufbaut. Sobald die Elektronenbeschleunigung abnimmt, wird dies nachgeholt, und die Abbremsung wird um so stärker. Dies gilt natürlich auch für das früher behandelte ausgedehnte Elektron.

4. Schlußbemerkungen

Aus diesen Betrachtungen ist auch ersichtlich, warum in beinahe sämtlichen linearen Integralgleichungstheorien[23, 24], in denen versucht wird, die Selbstenergiedivergenz des Elektrons zu beseitigen, eine Elektronenselbstbeschleunigung auftritt. In diesen Theorien wird die elektromagnetische Selbstenergie des Elektrons dadurch kom-

[21] C. J. Eliezer, Rev. Mod. Phys. **19**, 147 [1947].

[22] Die Singularität des Kraftfeldes bewirkt, daß auch der zeitliche Kraftverlauf eine Singularität besitzt, die durch Überlagerung einer Selbstbeschleunigungslösung nicht wegkompensiert werden kann, wie vorhin genauer erläutert wurde.

[23] F. Bopp, Ann. Phys., Lpz. **42**, 573 [1943]; Z. Naturforschg. **1**, 53 [1946].

[24] Stückelberg, Helv. Phys. Acta **17**, 3 [1944].

pensiert, daß Mesonenfelder eingeführt werden, deren Energiedichte negativ ist[25].

Das Elektron bekommt dadurch einen negativen Massenanteil, der durch die elektromagnetische Eigenkraft selbst beschleunigt werden kann. Eine einzige Ausnahme bilden die linearen Abänderungen der Maxwellschen Theorie, bei denen keine zusätzlichen Mesonenfelder eingeführt werden[27]. Diese Integralgleichungstheorien stellen den Übergang zum ausgedehnten Elektron dar[28]. Das elektromagnetische Feld des Elektrons wird in diesen Theorien nicht mehr singulär. Die elektromagnetische Feldenergie braucht daher nicht mehr durch Felder mit negativer Energiedichte kompensiert zu werden. Dasselbe gilt für die nichtlinearen Abänderungen der Maxwellschen Theorie[29, 1].

Wie man ohne weiteres sieht, ändert sich an den gesamten Betrachtungen nichts Prinzipielles, wenn man zur Quantenelektrodynamik übergeht. Warum die Selbstbeschleunigung in der Quantenelektrodynamik noch nicht bemerkt wurde, hat zwei Gründe. Erstens werden die Lösungen der bisher behandelten Probleme der Quantenelektrodynamik meistens als Potenzreihenentwicklung nach der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten dargestellt. Die Selbstbeschleunigungslösung kann aber nur nach der reziproken Feinstrukturkonstanten entwickelt werden[1]. Zweitens werden die meisten quantenelektrodynamischen Streuprobleme im Impulsraum untersucht. Dadurch gehen ebenfalls, wie vorhin gezeigt wurde, die divergierenden Selbstbeschleunigungslösungen verloren. Der einzige Grund, daß in der Quantenelektrodynamik eventuell keine Selbstbeschleunigung auftritt, könnte darin bestehen, daß nach der Massen- und Ladungsrenormalisierung die elektromagnetische Selbstenergie kleiner als die Ruhmasse des Elektrons ist[30], was aber unwahrscheinlich ist.

Herrn Professor F. Bopp und Herrn Dr. R. Haag danke ich vielmals für anregende Diskussionen.

[25] Solche Theorien lassen sich im allgemeinen auch als Differentialgleichungstheorien endlicher Ordnung schreiben[26].

[26] K. Wildermuth, Z. Naturforschg. **5a**, 373 [1950].

[27] A. Pais u. G. E. Uhlenbeck, Phys. Rev. **79**, 145 [1950].

[28] Ihnen entsprechen Differentialgleichungstheorien unendlich hoher Ordnung.

[29] M. Born u. L. Infeld, Proc. Roy. Soc., Lond. A **144**, 425 [1934].

[30] Durch die Vakuumpolarisation tritt ja eine Ladungsverschmierung ein, die die elektromagnetische Selbstenergie herabsetzt.

Über den spektroskopischen Nachweis des Benzyl- und des Benzalradikals ($C_6H_5\dot{C}H_2$ und $C_6H_5\dot{\underset{\cdot}{C}}H$)

Von H. Schüler und A. Michel

Aus der Forschungsstelle für Spektroskopie in der Max-Planck-Gesellschaft, Hechingen

(Z. Naturforschg. **10a**, 459—462 [1955]; eingegangen am 9. April 1955)

In der positiven Säule einer Glimmentladung zeigen Benzolderivate bei zusätzlicher Erwärmung des Entladungsrohres (bis ~300°C) neue Spektren, die auf einen schrittweisen Abbau des Substituenten hinweisen. Für Toluol, *i*-Propylbenzol und tertiäres Butylbenzol wird ein Abbauschema gegeben. Die bisher beobachteten Spektren werden an Hand dieses Schemas diskutiert. Dadurch ergeben sich neue Argumente für die Zuordnung des V- bzw. B-Spektrums zum Benzyl- bzw. Benzalradikal. Beim Spektrum des Benzylradikals wird gezeigt, daß es sich um den Übergang vom tiefsten angeregten Zustand zum Grundzustand handelt.

I. Teil

Die Anregung organischer Substanzen in der positiven Säule einer Glimmentladung[1] ermöglicht die systematische Untersuchung des Leuchtens vielatomiger Moleküle[2]. Solche Untersuchungen ergaben bisher neben den Spektren der Muttermoleküle zahlreiche neue Spektren, die dem Leuchten von Bruchstücken (Radikalen) zuzuschreiben sind. Diese Auffassung wird gestützt durch die Tatsache, daß bei verschiedenen Sub-

[1] H. Schüler, Spectrochim. Acta **4**, 85 [1950].

[2] H. Schüler u. L. Reinebeck, Z. Naturforschg. **5a**, 657 [1950].